

MA1201 MATEMATIKA IIA

Ifronika

January 14, 2023

1. Teknik Pengintegralan (Bab 7)
2. Bentuk Tak Tentu dan Integral Tak Wajar (Bab 8)
3. Deret Tak Hingga (Bab 9)
4. Irisan Kerucut dan Persamaan Parametrik Kurva (Bab 10)
5. Geometri di Bidang dan Ruang (Bab 11)
6. Fungsi Dua dan Tiga Peubah (Bab 12)
7. Integral Lipat (Bab 13)
8. Persamaan Diferensial Orde Dua (Bab 14)

7.1 Aturan Dasar Pengintegralan

Mengetahui bentuk integral baku dan dapat mengubah bentuk integral yang diberikan ke bentuk integral dengan substitusi variabel(peubah).

7.2 Pengintegralan Parsial

Menghitung integral dengan teknik pengintegralan parsial.

7.3 Integral Trigonometri

Menghitung beberapa integral trigonometri.

7.4 Teknik substitusi yang merasionalkan

Menghitung integral dengan teknik substitusi yang merasionalkan.

7.1 Aturan Dasar Pengintegralan

Beberapa Bentuk Integral Baku

1. $\int k \, dx = kx + C.$

2. a. $\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1.$

b. Untuk $r = -1$, $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C.$

3. $\int e^x \, dx = e^x + C.$

4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$

7.1 Aturan Dasar Pengintegralan

Beberapa Bentuk Integral Baku Fungsi Trigonometri

$$5. \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C.$$

$$8. \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C.$$

$$9. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C.$$

$$10. \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C.$$

$$11. \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$12. \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

7.1 Aturan Dasar Pengintegralan

Beberapa Bentuk Integral Baku Fungsi Aljabar

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

$$14. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

$$15. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{|x|}{a} \right) + C = \frac{1}{a} \cos^{-1} \left(\frac{a}{|x|} \right) + C.$$

Beberapa Bentuk Integral Baku Fungsi Hiperbolik

$$16. \int \sinh x dx = \cosh x + C.$$

$$17. \int \cosh x dx = \sinh x + C.$$

Mengubah Integral ke Bentuk Baku dengan Substitusi Peubah

Contoh 1. Tentukan $\int (x - 2)^5 dx$.

Penyelesaian. Dengan Menggunakan metode substitusi, misalkan $u = x - 2$, maka $du = dx$, sehingga

$$\begin{aligned}\int (x - 2)^5 dx &= \int u^5 du \\ &= \frac{1}{6}u^6 + C \\ &= \frac{1}{6}(x - 2)^6 + C.\end{aligned}$$

Mengubah Integral ke Bentuk Baku dengan Substitusi Peubah

Contoh 2. Tentukan $\int 2x(x^2 - 1)^4 dx$.

Penyelesaian. Dengan Menggunakan metode substitusi, misalkan $u = x^2 - 1$, maka $du = 2x dx$, sehingga

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2 - 1)dx &= \int u^4 du \\ &= \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= \frac{1}{5}(x^2 - 1)^5 + C.\end{aligned}$$

Latihan I

Hitunglah integral berikut.

1. $\int 2x(x^2 + 1)^4 dx.$

2. $\int x(x^2 + 3)^7 dx.$

3. $\int \cos 3x dx.$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx.$

5. $\int e^{4x} dx.$

6. $\int (5x + 2)^{4/3} dx.$

7. $\int x\sqrt{x^2 + 9} dx.$

8. $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 2} dx.$

9. $\int xe^{-x^2} dx.$

10. $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$

Pengintegralan Parsial

Misalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$. Aturan hasil kali untuk turunan,

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Kemudian integralkan kedua ruas,

$$\int u(x)v'(x) dx = \int \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] dx - \int v(x)u'(x) dx$$

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Jadi,

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Untuk integral tentu,

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x),$$

atau

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Contoh 1. Tentukan $\int x \cos x \, dx$.

Contoh 2. Tentukan $\int x \sin x \, dx$.

Hitunglah integral berikut.

1. $\int x e^x dx.$

2. $\int x e^{3x} dx.$

3. $\int x \sin 4x dx.$

4. $\int x^2 e^x dx.$

5. $\int x^2 \sin x dx.$

6. $\int_0^1 x(x-1)^6 dx.$

7.3 Integral Trigonometri

Beberapa Bentuk Integral Yang Akan Dibahas

Bentuk I

1. $\int \sin^n x \, dx.$

2. $\int \cos^n x \, dx.$

Bentuk II

1. $\int \sin^m x \cos^n x \, dx.$

Bentuk III

1. $\int \sin mx \cos nx \, dx.$

2. $\int \sin mx \sin nx \, dx.$

3. $\int \cos mx \cos nx \, dx.$

Bentuk IV

1. $\int \tan^n x \, dx.$

2. $\int \cot^n x \, dx.$

Bentuk V

1. $\int \tan^m x \sec^n x \, dx.$

2. $\int \cot^m x \csc^n x \, dx.$

Identitas yang perlu diketahui

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

4. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

5. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

7.3 Integral Trigonometri

Bentuk I

$$\int \sin^n x \text{ dan } \int \cos^n x dx.$$

Contoh.

1. Tentukan $\int \sin^3 x dx$.
2. Tentukan $\int \cos^2 x dx$.

Latihan.

1. Tentukan $\int \cos^5 x dx$.
2. Tentukan $\int \sin^4 x dx$.

7.3 Integral Trigonometri

Bentuk II

$$\int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Contoh.

1. Tentukan $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Latihan.

1. Tentukan $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

7.3 Integral Trigonometri (Bentuk III)

Persamaan yang perlu diketahui

1. $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x).$
2. $\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2} (\cos(m+n)x - \cos(m-n)x).$
3. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$

7.3 Integral Trigonometri

Bentuk III

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \sin nx \, dx \text{ dan } \int \cos mx \cos nx \, dx.$$

Contoh.

1. Tentukan $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$.

Latihan.

1. Tentukan $\int \sin 4x \sin 2x \, dx$.
2. Tentukan $\int \cos 3x \cos 4x \, dx$.

7.3 Integral Trigonometri

Bentuk IV

$$\int \tan^n x \, dx \quad \mathbf{dan} \quad \int \cot^n x \, dx.$$

Contoh.

1. Tentukan $\int \tan^3 x \, dx$.

Latihan.

1. Tentukan $\int \cot^4 x \, dx$.

7.3 Integral Trigonometri

Bentuk V

$$\int \tan^m x \sec^n x dx \text{ dan } \int \cot^m x \csc^n x dx.$$

Contoh.

1. Tentukan $\int \tan^3 x \sec^2 x dx$.

Latihan.

1. Tentukan $\int \tan^{-1/2} x \sec^4 x dx$.

2. Tentukan $\int \sec^3 x dx$.

7.4 Teknik Substitusi Yang Merasionalkan

Integral yang mengandung $\sqrt[n]{ax + b}$

Contoh.

1. Tentukan $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} dx.$

Latihan.

1. Tentukan $\int x^3 \sqrt{x + 2} dx.$

2. Tentukan $\int \frac{x}{\sqrt{3x + 4}} dx.$

7.4 Teknik Substitusi Yang Merasionalkan

Integral yang mengandung $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ dan $\sqrt{x^2 - a^2}$

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$ **substitusi** $x = a \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$ **substitusi** $x = a \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$ **substitusi** $x = a \sec t$, $0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2}$.

Contoh.

1. Tentukan $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

2. Tentukan $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

3. Tentukan $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Latihan.

1. Tentukan $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$.

2. Tentukan $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.

3. Tentukan $\int \frac{1}{\sqrt{25+x^2}} dx$.

7.5 Integral Fungsi Rasional

Menghitung integral fungsi rasional dengan menggunakan pecahan parsial.

7.6 Strategi Pengintegralan

Mengentahui teknik apa yang harus dilakukan jika dihadapkan pada suatu bentuk integral.

7.5 Integral Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah hasil bagi dari dua fungsi polinomial. Secara umum fungsi rasional dapat dituliskan menjadi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial.

Contoh.

$$1. f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \quad 2. g(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-2} \quad 3. h(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+1}.$$

Fungsi rasional terbagi dua:

1. Fungsi rasional dengan derajat pembilang lebih kecil dari penyebut.
2. Fungsi rasional dengan derajat pembilang lebih besar dari penyebut.

7.5 Integral Fungsi Rasional

2. Fungsi rasional dengan derajat pembilang lebih besar dari penyebut.

Jika bagian dua ini terjadi, sederhanakan fungsi menjadi,

$$f(x) = R(x) + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

sehingga derajat $P^*(x)$ lebih kecil dari $Q^*(x)$.

Contoh 3.

$$h(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

1. Faktor Linear Berbeda

Contoh.

1. Tentukan $\int \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 1)} dx$.

Langkah - langkah penyelesaian.

1. Tuliskan $\frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1}$.

2. Tentukan nilai A dan B .

3. Tentukan nilai integral

$$\int \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 1)} dx = \int \frac{A}{x + 2} dx + \int \frac{B}{x - 1} dx.$$

2. Faktor Linear Berulang

Contoh.

1. Tentukan $\int \frac{x}{(x+3)^2} dx$.

Langkah - langkah penyelesaian.

1. Tuliskan $\frac{x}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2}$.

2. Tentukan nilai A dan B .

3. Tentukan nilai integral

$$\int \frac{x}{(x+3)^2} dx = \int \frac{A}{(x+3)} dx + \int \frac{B}{(x+3)^2} dx.$$

3. Faktor Linear Berbeda dan Berulang

Contoh.

1. Tentukan $\int \frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2} dx$.

Langkah - langkah penyelesaian.

1. Tuliskan $\frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$.

2. Tentukan nilai A , B dan C .

3. Tentukan nilai integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{(x-1)} dx + \int \frac{C}{(x-1)^2} dx.$$

3. Faktor kuadratik

Contoh.

1. Tentukan $\int \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 2)} dx$.

Langkah - langkah penyelesaian.

1. Tuliskan $\frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)}$.

2. Tentukan nilai A , B dan C .

3. Tentukan nilai integral

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 2)} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)} dx.$$

4. Faktor kuadratik Berulang

Contoh.

1. Tentukan $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x^2 + 1)^2} dx$.

Langkah - langkah penyelesaian.

1. Tuliskan $\frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$.

2. Tentukan nilai A, B, C, D dan E .

3. Tentukan nilai integral

$$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} dx + \int \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Strategi Pengintegralan

Jika kita dihadapkan pada suatu bentuk integral tak tentu maka yang bisa dilakukan adalah:

1. Coba dengan menggunakan **teknik substitusi** dan merubahnya menjadi bentuk baku yang kita kenal.
2. Jika teknik substitusi gagal, coba dengan **teknik pengintegralan parsial**.
3. Jika integral mengandung bentuk akar, coba dengan **teknik substitusi yang merasionalkan**.
4. Jika bentuk integral merupakan fungsi rasional, coba dengan **teknik dekomposisi fungsi rasional**.