9.1 Barisan Tak Terhingga dan 9.2 Deret Tak Terhingga (Memeriksa Kekonvergenan Suatu Barisan dan Memeriksa Kekonvergenan Suatu Deret)

MA1201 MATEMATIKA 2A
Ifronika

February 2, 2023

Definisi
Barisan (tak terhingga) adalah suatu fungsi yang daerah asalnya adalah bilangan bulat positif dan daerah hasilnya adalah suatu himpunan bilangan real.

Notasi

1. $a_1, a_2, a_3, \ldots$
2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau $\{a_n\}$

Deskripsi barisan

1. Penulisan beberapa suku awal: $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$;
2. Rumus eksplisit: $a_n = 4n - 2,\ n \geq 1$;
3. Rumus rekursif: $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 4$, $n \geq 2$.

Kekonvergenan Barisan

Definisi

Barisan $\{a_n\}$ disebut konvergen ke L dan ditulis dengan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

jika untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan bulat positif N sedemikian hingga

$$n \geq N \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

Barisan yang tidak konvergen ke sebarang bilangan real L disebut barisan yang divergen.

Contoh

Misalkan $a_n = \dfrac{1}{n}$. Barisan $\{a_n\}$ konvergen dengan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah barisan yang konvergen dan k adalah konstanta, maka

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$;

Contoh

Misalkan $a_n = \dfrac{3n-1}{2n+7}$ untuk setiap bilangan asli n. Hitung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Teorema

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ adalah barisan yang konvergen ke L dan misalkan terdapat bilangan asli K sedemikian hingga $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk setiap $n \geq K$, maka barisan $\{b_n\}$ konvergen ke L.

Contoh

Misalkan $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ untuk setiap bilangan asli n. Hitung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Teorema

Jika $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Contoh

Misalkan $-1 < r < 1$. Hitung $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$.

Teorema Kekonvergenan Monoton

Definisi

1. Barisan $\{a_n\}$ disebut monoton naik jika $a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap bilangan asli n.
2. Barisan $\{a_n\}$ disebut monoton turun jika $a_n \geq a_{n+1}$ untuk setiap bilangan asli n.

Teorema

1. Jika u adalah suatu batas atas untuk barisan monoton naik $\{a_n\}$, maka barisan $\{a_n\}$ konvergen ke a dengan $a \leq u$.
2. Jika ℓ adalah suatu batas bawah untuk barisan monoton turun $\{b_n\}$, maka barisan $\{b_n\}$ konvergen ke b dengan $b \geq \ell$.

Contoh

Misalkan $a_n = \dfrac{n^2}{3^n}$. Periksan kekonvergenan $\{a_n\}$ dengan menggunakan Teorema Kekonvergenan Monoton.

Latihan soal Subbab 9.1

1. Misalkan $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. Hitung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
2. Misalkan $a_n = \dfrac{4n-3}{5n+2}$ dan $b_n = \dfrac{2n^2-3}{3n^2+2n+1}$. Hitung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
3. Misalkan $c_n = \dfrac{\cos n}{n}$. Hitung $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Deret Tak Terhingga

Bentuk penjumlahan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

disebut sebagai **Deret Tak Terhingga** dan dituliskan dalam notasi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Deret Tak Terhingga

Dari deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

kita dapat menghitung jumlah parsialnya,

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$

Sehingga kita peroleh barisan $\{S_n\}$ sebagai barisan jumlah parsial.

Definisi. jika barisan $\{S_N\}$ konvergen ke S, maka kita definisikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = S.$$

Sebaliknya jika $\{S_N\}$ divergen maka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh.

Perhatikan contoh berikut

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

1. Tentukan jumlah parsialnya
   $S_1 = \frac{1}{2}$
   $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
   $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
   $\vdots$
   $S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N}.$
2. Tentukan formulasi dari $\{S_N\}$.

2. Formulasi dari $\{S_N\}$.
$S_1 = \frac{1}{2}$
$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$
$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$
$\vdots$
$S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N} = \frac{2^N - 1}{2^N} = 1 - \frac{1}{2^N}.$

3. Tentukan Limitnya.
$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{2^N} = 1.$

Sehingga,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{2^N} = 1.$$

Latihan. Periksa kekonvergenan deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Deret Geometri

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, \text{ dengan } a \neq 0 \text{ dan } r \neq 1.$$

Perhatikan jumlah parsial berikut.

$$\begin{aligned} S_N &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{N-1} \\ rS_N &= ar + ar^2 + r^3 + \cdots + ar^N, \end{aligned}$$

dengan mengurangkan kedua persamaan di atas diperoleh,

$$\begin{aligned} S_N - rS_N &= a - ar^N \\ S_N(1-r) &= a - ar^N \\ S_N &= \frac{a - ar^N}{1-r}. \end{aligned}$$

Sehingga $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} = \dfrac{a - ar^N}{1-r}$, konvergen untuk $|r| < 1$ dan divergen untuk $|r| \geq 1$.

Jadi deret geometri

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{a - ar^N}{1-r} = \frac{a}{1-r}, \text{ untuk } |r| < 1,$$

dan divergen untuk $|r| \geq 1$.

Contoh. Deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ konvergen ke $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Uji Kedivergenan

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ atau

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Catatan: Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ belum tentu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Contoh.

Deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ merupakan deret divergen karena $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Deret Harmonik

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ merupakan deret harmonik.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \\
&= 1 + 1 + 1 + \cdots
\end{aligned}
$$

Jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ merupakan deret divergen.

Contoh. Tunjukan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ konvergen.

Jawab.
Jumlah parsial dari deret di atas,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}. \end{aligned}$$

Sehingga, $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} = \frac{1}{2}$.
Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ konvergen,
dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} = \frac{1}{2}$.

Teorema Kelinearan Deret

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen dan jika $c \in \mathbb{R}$, maka

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Contoh. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right)$.

Teorema Kelinearan Deret

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen dan $c \neq 0$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ divergen.

Contoh. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ merupakan deret harmonik dan divergen.

Sehingga deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \frac{1}{n}$ juga deret divergen.

9.3 Deret Positif
(Memeriksa Kekonvergenan Deret Positif dengan Uji Jumlah Terbatas dan Uji Integral)

MA1201 MATEMATIKA 2A
Ifronika

February 2, 2023

Deret Positif (Uji Jumlah Terbatas)

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut **deret positif** jika $a_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Teorema(Uji Jumlah Terbatas)
Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya $(S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n)$ terbatas.

Contoh. Tunjukan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergen.

Jawab. Jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

$$
\begin{aligned}
S_N &= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{N!} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.
\end{aligned}
$$

Jadi $S_N \leq 2$. Karena jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ terbatas, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergen.

Misalkan f fungsi yang **kontinu**, **tak negatif**, dan **tak naik** pada $[1,\infty)$ dan $a_n = f(n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergen,}$$

jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx \text{ konvergen.}$$

Contoh. Deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, karena integral tak wajar $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ konvergen.

Deret Positif (Uji Integral)

Dengan menggunakan uji integral diperoleh dapat diperiksa bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p > 1$.

Latihan

Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} \right)$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+2}{4^{n-1}}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$.
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$.
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$.
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n}$.
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$.

9.4 Deret Positif
(Memeriksa Kekonvergenan Deret Positif dengan Uji Perbandingan dan Uji Rasio)

MA1201 MATEMATIKA 2A
Ifronika

February 2, 2023

Teorema A. Misalkan $0 \leq a_n \leq b_n$ untuk setiap $n \geq N$.

1. Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.
2. Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen.

Contoh. Periksa kekonvergenan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3}$.

Jawab. Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{1+n^3} < \frac{1}{n^3} \quad \text{untuk } n \geq 1.$$

Karena $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergen, maka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3}$ konvergen.

Teorema B. Misalkan $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

1. Jika $0 < L < \infty$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sama-sama konvergen atau divergen.
2. Jika $L = 0$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.
3. Jika $L = \infty$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh. Periksa kekonvergenan deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$.

Jawab. Dengan menggunakan uji perbandingan limit,

Misalkan $a_n = \dfrac{1}{1+n}$ dan pilih $b_n = \dfrac{1}{n}$ dengan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} = 1.$$

karena $L = 1 > 0$ dan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen, maka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ divergen.

Teorema C. Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret positif dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

1. Jika $\rho < 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.
2. Jika $\rho > 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.
3. Jika $\rho = 1$, maka uji ini tidak dapat memberikan kesimpulan.

Contoh. Periksa kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Jawab. Dengan menggunakan uji rasio,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Karena $\rho = 0 < 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ konvergen.

Latihan.

Periksa kekonvergenan deret-deret berikut.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 - 1}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 2}{2n^3 + n^2 - 1}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.
7. $\displaystyle\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots$
8. $\displaystyle 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{4^2} + \cdots$