Fungsi Kompleks

(Ifronika)

1. Fungsi Kompleks

Misalkan $S \subset \mathbb{C}$. Fungsi kompleks f adalah suatu aturan yang mengkaitkan setiap $z \in S$ dengan tepat satu $w \in \mathbb{C}$, ditulis $w = f(z)$.

$$\begin{aligned} f :& S \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = w \end{aligned}$$

Himpunan S disebut sebagai daerah definisi dari fungsi f dan $f(z)$ disebut peta dari f, range disebut daerah hasil dari f yakni

$$\{w \in \mathbb{C} : f(z) = w, z \in \mathbb{C}\}.$$

Contoh.

1. $f(z) = z,\ z \in \mathbb{C}$.
2. $g(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{C}$.
3. $h(z) = z^2\ z \in \mathbb{C}$.
4. $k(z) = \dfrac{1}{z},\ z \neq 0$.

Misalkan $z = x + iy$, maka $f(z) = f(x + iy)$.

Contoh. Misalkan $z = x + iy$. Jika $f(z) = z$, maka $f(x + iy) = x + iy$.

Contoh. Misalkan $z = x+iy$ dan $f(z) = z^2$. Maka $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$.

Secara umum, jika $z = x + iy$ fungsi $f(z)$ dapat ditulis menjadi

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Jika $w = f(z)$, maka Re w dan Im w merupakan fungsi dua peubah. Jika $v(x, y) = 0$, maka fungsi f merupakan fungsi bernilai real.

Contoh. Misalkan $z = x + iy$ dan $f(z) = |z|^2$. Diperoleh,

$$f(z) = f(x + iy) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2.$$

Jadi, fungsi $f(z) = |z|^2$ merupakan fungsi bernilai real.

Contoh. Tuliskan $f(z) = 3z^2 + i$ dalam bentuk u dan v.

Jawab. Misalkan $z = x + iy$, maka

$$\begin{aligned} f(z) = 3z^2 + i &= 3(x + iy)^2 + i \\ &= 3(x^2 - y^2 + i2xy) + i \\ &= (3x^2 - 3y^2) + i(6xy + 1). \end{aligned}$$

Misalkan z ditulis dalam bentuk polar dengan $z = re^{i\theta}$, maka

$$\begin{aligned} w = f(z) &= f(re^{i\theta}) \\ &= u(r, \theta) + iv(r, \theta). \end{aligned}$$

Contoh. Misalkan $g(z) = z^2$, maka

$$\begin{aligned} g(re^{i\theta}) &= (re^{i\theta})^2 \\ &= r^2 e^{i2\theta} \\ &= r^2(cos2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Jika $a_0, a_1, \cdots a_n \in \mathbb{C}$ dengan $a_n \neq 0$, fungsi

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

disebut sebagai **Fungsi Polinomial** derajat-n. Daerah definisi dari fungsi $P(z)$ adalah $\mathbb{C}$.

Fungsi $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ disebut sebagai fungsi rasional dengan $P(z)$ dan $Q(z)$ adalah fungsi-fungsi polinomial dan $Q(z) \neq 0$.

Definsi 1. *Misalkan $S \subset \mathbb{C}$. Fungsi bernilai banyak f dari S adalah aturan pengaitan $z \in S$ ke lebih dari satu nilai $w \in \mathbb{C}$. Untuk mempelajari fungsi bernilai banyak ini biasanya diambil satu nilai w sehingga dihasilkan suatu fungsi f.*

Contoh. Misal $w = z^{1/2}$, maka $z = w^2$, sehingga $z^{1/2}$ memiliki 2 akar yakni

$$c_k = \sqrt{2} e^{i(\theta/2 + k\pi)}, \ k = 0, 1.$$

Untuk $k = 0$, diperoleh

$$c_0 = \sqrt{r} e^{i\theta/2}.$$

Untuk $k = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{r} e^{i(\theta/2+\pi)} \\ &= \sqrt{r}(cos(\theta/2 + \pi) + i\sin(\theta/2 + \pi)) \\ &= -\sqrt{r} e^{i\theta/2} \end{aligned}$$

Contoh. Misalkan $z \neq 0$, maka akar pangkat n, $z^{1/n}$ memiliki n buah akar, yakni

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

dengan $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, $r = |z|$ dan $\theta = \text{Arg } z$.

Apabila diambil satu akar, misal untuk $k = 0$, maka didapat fungsi bernilai tunggal,

$$f(z) = \sqrt[n]{r} \exp\left(i\frac{\theta}{n}\right).$$

Interpretasi Geometri dari Fungsi Kompleks

Fungsi f dapat dipandang sebagai suatu pemetaan atau transformasi $f : S \to \mathbb{C}$. **Peta** (*image*) dari $z \in S$ adalah titik $w = f(z)$, dan himpunan semua peta dari semua anggota subhimpunanan $T \subset S$, disebut peta dari T. Peta dari seluruh S disebut **Range** dari f. **Prapeta** (*inverse image*) dari $w \in \mathbb{C}$, adalah semua $z \in S$, yang memenuhi $f(z) = w$.

Contoh.

1. **Translasi:** Pemetaan $w = z + 1 = (x + 1) + iy$ dimana $z = x + iy$ adalah translasi titik z satu satuan ke kanan.
2. **Rotasi:** Karena $i = e^{i\pi/2}$, pemetaan $w = iz = re^{i(\theta+\pi/2)}$, dimana $z = re^{i\theta}$, adalah rotasi vektor z sebesar $\pi/2$, berlawanan dengan arah jarum jam.
3. **Refleksi:** Pemetaan $w = \bar{z} = x - iy$ adalah refleksi titik $z = x + iy$ terhadap sumbu real.

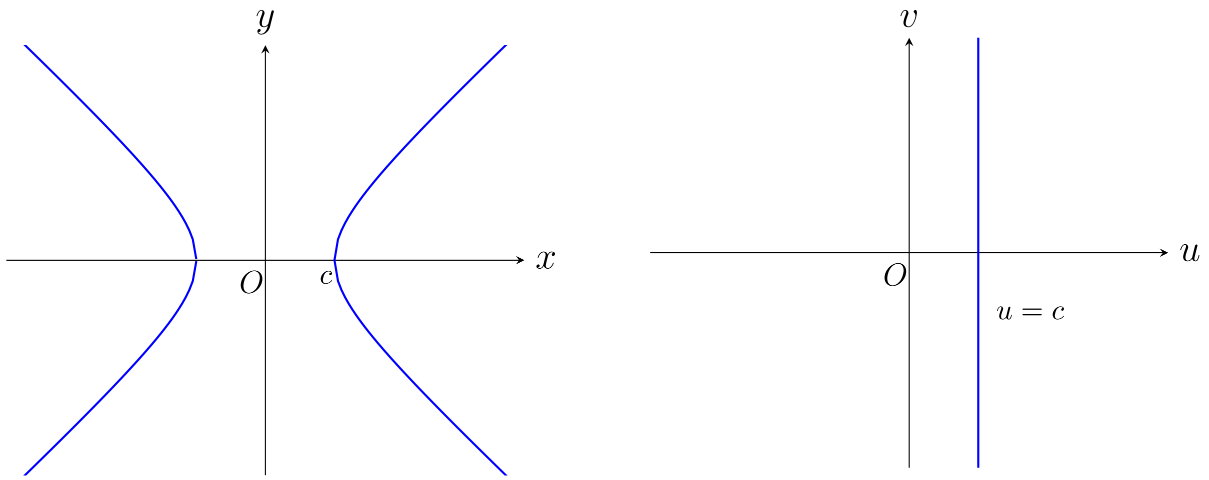
Pemetaan $w = z^2$

Misalkan $z = x + iy$, maka $w = x^2 - y^2 + i2xy$. Diperoleh

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{dan} \quad v(x, y) = 2xy$$

sebagai pemetaan dari bidang-xy ke bidang-uv.

Untuk $c > 0$, hiperbola $x^2 - y^2 = c$ dipetakan menjadi garis $u = c$.



2. Limit

Definsi 2. *Misalkan fungsi f terdefinisi di suatu lingkungan yang terhapuskan dari z_0. Limit dari f apabila z mendekati z_0 adalah w_0, yang dinotasikan dengan*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0,$$

artinya, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $0 < |z - z_0| < \delta$, berlaku $|f(z) - w_0| < \epsilon$.

Dengan kata lain, untuk setiap lingkungan$-\epsilon$ dari w_0,

$$D(w_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \epsilon\},$$

terdapat lingkungan terhapuskan-δ dari z_0,

$$D(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\},$$

sehingga untuk setiap $z \in D(z_0, \delta)$ mempunyai peta $w \in D(w_0, \epsilon)$.

Catatan: z_0 merupakan titik limit dari daerah definsi f.

Contoh: Buktikan $\lim_{z\to 2} 2i\bar{z} = 4i$.

Jawab:
Ambil $\epsilon > 0$ sembarang, pilih $\delta > 0$, dengan $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, sehingga untuk setiap $0 < |z-2| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned}|2i\bar{z} - 4i| &= |2i(\bar{z} - 2)| \\ &= |2i||\bar{z} - 2| \\ &= 2|\bar{z} - \bar{2}| \\ &= 2|\overline{z - 2}| \\ &= 2|z-2| \\ &< 2\delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\lim_{z\to 2} 2i\bar{z} = 4i$.

Teorema 1 (Ketunggalan Limit)**.** *Jika* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *dan* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$, *maka* $w_0 = w_1$.

Proof. Ambil $\epsilon > 0$ sembarang.
Karena $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, maka terdapat $\delta_0 > 0$, sehingga untuk setiap $0 < |z - z_0| < \delta_0$, berlaku

$$|f(z) - w_0| < \frac{\epsilon}{2},$$

dan karena $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$, maka terdapat $\delta_1 > 0$, sehingga untuk setiap $0 < |z - z_0| < \delta_1$, berlaku

$$|f(z) - w_0| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pilih $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, sehingga untuk setiap $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned}|w_1 - w_0| &= |w_1 - f(z) + f(z) - w_0| \\ &\leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_0| \\ &= |f(z) - w_1| + |f(z) - w_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$, haruslah $|w_1 - w_0| = 0$. Jadi, $w_1 = w_0$. □

Contoh. Misalkan $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$. Buktikan bahwa $\lim_{z\to z_0} f(z)$ tidak ada.

Jawab. Misalkan $z = x + iy$, sehingga $f(z) = \dfrac{x+iy}{x-iy}$.

Perhatikan bahwa untuk $z = x + 0i$, diperoleh $f(z) = \dfrac{x+0i}{x-0i} = 1$. Akibatnya, $\lim_{z\to z_0} f(z) = 1$.

Untuk $z = 0 + iy$, diperoleh $f(z) = \dfrac{0+iy}{0-iy} = -1$. Akibatnya, $\lim_{z\to z_0} f(z) = -1$.

Karena apabila 0 didekati melalui sumbu Re, $f(z)$ akan menuju 1, dan apabila didekati melalui sumbu Im, $f(z)$ akan menuju -1, maka $\lim_{z\to z_0} f(z)$ tidak ada.

Teorema 2. *Misalkan* $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0$ *dan* $w_0 = u_0 + iv_0$, *maka berlaku*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

jika dan hanya jika $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ *dan* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$.

Contoh. Buktikan $\lim_{z\to 2} 2i\bar{z} = 4i$.

Jawab. Misalkan $z = x + iy$, maka

$$\begin{aligned} f(z) = 2i\bar{z} &= 2i(x - iy) \\ &= 2y + i2x. \end{aligned}$$

Diperoleh, $\lim_{(x,y)\to(2,0)} 2y = 0$ dan $\lim_{(x,y)\to(2,0)} 2x = 4$. Jadi, $\lim_{z\to 2} 2i\bar{z} = 0 + i4 = 4i$.

Teorema 3. *Misalkan* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ *dan* $\lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$, *maka*

1. $\lim_{z\to z_0} \big(f(z) \pm g(z)\big) = w_1 \pm w_2$
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = w_1 w_2$
3. $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_1}{w_2}$, *untuk* $w_2 \neq 0$.

Dari definisi limit dapat dibuktikan

$$\lim_{z\to z_0} c = c \text{ dan } \lim_{z\to z_0} z = z_0.$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 3 juga dapat dibuktikan

$$\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

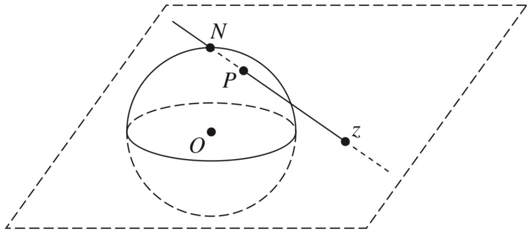
Apabila $P(z)$ adalah polinomial, maka

$$\lim_{z\to z_0} P(z) = P(z_0).$$

Apabila $R(z)$ adalah fungsi rasional dengan $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, maka

$$\lim_{z\to z_0} R(z) = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)} \text{ dengan } Q(z_0) \neq 0.$$

Limit yang melibatkan tak hingga



Untuk setiap titik z pada bidang kompleks, tarik garis yang menghubungkan titik z dengan titik kutub utara N pada bola. Garis akan memotong bola tepat di satu titik, misalkan titik P. Didapat suatu korespondensi satu-satu dari bidang kompleks dengan bola selain titik N. Selanjutnya titik N berkorespondensi dengan tak hingga (∞) pada bidang kompleks yang diperluas yaitu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Bola ini dikenal sebagai **Bola Riemann**, dan korespondensi antara bidang kompleks yang diperluas dengan bola Riemann disebut **Projeksi stereografik**.

Definsi 3. *1. Lingkungan dari ∞ adalah himpunan $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\epsilon\}$.*

2. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ artinya, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $0 < |z - z_0| < \delta$, berlaku $|f(z)| > 1/\epsilon$.

3. $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ artinya, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $|z| > 1/\delta$, berlaku $|f(z) - w_0| < \epsilon$

4. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ artinya, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $|z| > 1/\delta$, berlaku $|f(z)| > 1/\epsilon$.

Teorema 4. *Misalkan $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$, maka*

1. *$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ jika dan hanya jika $\lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.*
2. *$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika $\lim_{z \to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = w_0$.*
3. *$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ jika dan hanya jika $\lim_{z \to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = 0$.*

Contoh: Buktikan $\lim_{z \to \infty} z^2 = \infty$.

Jawab. Misalkan $f(z) = z^2$, maka $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{z^2}$.

Diperoleh, $\lim_{z \to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = \lim_{z \to 0} \dfrac{1}{1/z^2} = \lim_{z \to 0} z^2 = 0$.

Jadi, $\lim_{z \to \infty} z^2 = \infty$.

Latihan.

1. Buktikan $\lim_{z \to \infty} \dfrac{z^2 + 1}{z - 1} = \infty$.
2. Buktikan $\lim_{z \to 1} \dfrac{1}{(z - 1)^3} = \infty$.
3. $\lim_{z \to \infty} \dfrac{4z^2}{(z - 1)^2} = 4$.

Definsi 4. *Fungsi f dikatakan kontinu di z_0 apabila*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

dengan kata lain, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $|z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Fungsi f dikatakan kontinu di suatu region S apabila f kontinu disetiap titik pada S.

Teorema 5. *Komposisi dari fungsi-fungsi kontinu adalah fungsi kontinu.*

Teorema 6. *Jika fungsi f kontinu di z_0 dan $f(z_0) \neq 0$, maka terdapat lingkungan dari z_0 sehingga $f(z) \neq 0$ di lingkungan tersebut.*

Teorema 7. *Misalkan $z = x + iy$ dan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Fungsi f kontinu di $z_0 = x_0 + iy_0$ jika dan hanya jika u dan v kontinu di (x_0, y_0).*

Teorema 8. *Jika fungsi f kontinu di suatu region R yang tertutup dan terbatas, maka terdapat bilangan real positif M sehingga*

$$|f(z)| \leq M \quad \textit{untuk semua } z \in R,$$

dan paling sedikit ada satu z di R sehingga $|f(z)| = \inf\{M : M \text{ batas atas}\}$.

2.Turunan dan Persamaan Cauchy-Riemann

Definsi 5. *Misalkan fungsi f terdefinisi di suatu lingkungan dari z_0. Fungsi f dikatakan **diferensiabel** (memiliki turunan) di z_0 apabila*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*ada dan $f'(z_0)$ disebut **turunan** dari f di z_0.*

Apabila dituliskan $\Delta z = z - z_0$ dengan $z \neq z_0$, maka turunan dari f di z_0 bisa dituliskan menjadi

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Selanjutnya, notasikan $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, dan diperoleh

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z).$$

Notasi $\dfrac{dw}{dz}$ disebut notasi Leibnez dari turunan $f'(z)$.

Contoh. Misalkan $f(z) = z$. Untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, berlaku

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z) - z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1.$$

Diperoleh $f'(z) = 1$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

Contoh. Misalkan $f(z) = 1/z$ untuk setiap $z \neq 0$. Diperoleh,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1/(z + \Delta z) - 1/z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z - (z + \Delta z)}{(z + \Delta z) z \Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{(z + \Delta z) z} = -\frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Contoh. Misalkan $f(z) = \overline{z}$. Untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, berlaku

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

Apabila $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ ada, dan Δz dituliskan $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, maka

$$\lim_{(\Delta x, 0) \to (0,0)} \frac{\overline{\Delta x + i0}}{\Delta x + i0} = \lim_{(0, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\overline{0 + i\Delta y}}{0 + i\Delta y}.$$

Tetapi,

$$\lim_{(\Delta x, 0) \to (0,0)} \frac{\overline{\Delta x + i0}}{\Delta x + i0} = \lim_{(\Delta x, 0) \to (0,0)} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

dan

$$\lim_{(0, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\overline{0 + i\Delta y}}{0 + i\Delta y} = \lim_{(0, \Delta y) \to (0,0)} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Akibatnya, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ tidak ada. Jadi, $f(z) = \overline{z}$ tidak mempunyai turunan diseluruh $\mathbb{C}$.

Contoh. Misalkan $f(z) = |z|^2$. Perhatikan untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, berlaku

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} \\
&= \frac{(z + \Delta z)(\overline{z + \Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z} \\
&= \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}
\end{aligned}$$

Misalkan $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, maka apabila $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ ada, haruslah

$$\lim_{(\Delta x, 0) \to (0,0)} \left(\overline{z} + \Delta x + z\frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{(0, \Delta y) \to (0,0)} \left(\overline{z} + \overline{i\Delta y} + z\frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y} \right),$$

yang mengakibatkan $\bar{z} + z = \bar{z} - z$, yang hanya dipenuhi oleh $z = 0$. Akibatnya $f'(z)$ tidak ada untuk semua $z \neq 0$. Untuk $z = 0$, diperoleh

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = 0,$$

sehingga $f(z) = |z|^2$ memiliki turunan di 0 dengan $f'(0) = 0$.

Catatan: Dari contoh fungsi $f(z) = |z|^2 = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan $u(x, y) = x^2 + y^2$ dan $v(x, y) = 0$, diperoleh beberapa fakta:

1. Suatu fungsi f bisa mempunyai turunan di suatu titik z_0 tetapi tidak mempunyai turunan disekitarnya.
2. Kekontinuan turunan parsial dari fungsi dua peubah $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ di suatu titik tidak menjamin keterdiferensialan fungsi f di titik tersebut.
3. Kekontinuan fungsi f di suatu titik tidak menjamin keterdiferensialan fungsi f di titik tersebut.

Teorema 9. *Jika fungsi f terdiferensialkan di z_0, maka f kontinu di z_0.*

Sifat-sifat turunan

Teorema 10. *Misalkan $f'(z)$ dan $g'(z)$ ada untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, maka*

1. *Untuk $c \in \mathbb{C}$, $\frac{d}{dz}\big(cf(z)\big) = cf'(z)$.*
2. $\frac{d}{dz}\big(f(z) + g(z)\big) = f'(z) + g'(z)$.
3. $\frac{d}{dz}\big(f(z)g(z)\big) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
4. $\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$, *untuk $g(z) \neq 0$.*

Lema 1. *Untuk bilangan bulat n berlaku*

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}.$$

Teorema 11. *Misalkan f memiliki turunan di z_0 dan g mempunyai turunan di $f(z_0)$, maka fungsi komposisi $F(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z))$ mempunyai turunan di z_0, dan*

$$F'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Teorema 12 (Persamaan Cauchy-Riemann). *Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ untuk $z = x + iy$. Jika $f'(z)$ ada di titik $z_0 = x_0 + iy_0$, maka turunan parsial pertama dari fungsi dua peubah u dan v ada di (x_0, y_0) dan memenuhi* ***Persamaan Cauchy-Riemann****:*

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{dan} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

di (x_0, y_0). Selanjutnya

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Proof. Misalkan $z_0 = x_0 + iy_0$ dan $f'(z_0)$ ada. Misalkan pula $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ dan $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z_0)$. diperoleh

$$\Delta w = \big(u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\big) - \big(u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\big)$$

sehingga,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Karena $f'(z_0)$ ada, diperoleh

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i\frac{v(x_0, y_0 + Deltay) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

□

Contoh. Dari contoh sebelumnya, jika $f(z) = \frac{1}{z}$, maka $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ untuk seluruh z bilangan kompleks kecuali di $z = 0$. Perhatikan bahwa, untuk $z = x + iy \neq 0$,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Diperoleh, $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ dan $v(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ yang memenuhi

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = v_y(x, y)$$

dan

$$u_y(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -v_x(x, y),$$

sehingga untuk $z \neq 0$,

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Teorema 13. *Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ untuk $z = x + iy$. Jika f terdefinisi pada suatu lingkungan dari $z_0 = x_0 + iy_0$ dan memenuhi:*

1. *Turunan-turunan parsial pertama dari u dan v terhadap x dan y ada di setiap titik di lingkungan tersebut, dan*
2. *Turunan-turunan parsial tersebut kontinu di (x_0, y_0) dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann di (x_0, y_0);*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{dan} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0),$$

maka $f'(z)$ ada dan memenuhi

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Contoh. Misalkan $z = x + iy$ dan$f(z) = f(x + iy) = e^x e^{iy}$ sehingga

$$\begin{aligned} f(z) = f(x + iy) &= e^x e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y. \end{aligned}$$

Diperoleh $u(x, y) = e^x \cos y$ dan $v(x, y) = e^x \sin y$. Selanjutnya diperoleh

$$u_x(x, y) = e^x \cos y, \; u_y(x, y) = -e^x \sin y$$

dan

$$v_x(x,y) = e^x \sin y,\ v_y(x,y) = e^x \cos y,$$

dimana memenuhi

$$u_x(x,y) = e^x \cos y = v_x(x,y)$$

dan

$$u_y(x,y) = -e^x \sin y = -v_x(x,y).$$

Perhatikan juga turunan-turunan parsial pertama dari u dan v kontinu untuk semua (x,y). Akibatnya $f(z)$ mempunyai turunan di $\mathbb{C}$, dengan

$$\begin{aligned} f'(z) = f'(x+iy) &= u_x(x,y) + iv(x,y) \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^x e^{iy} = f(z). \end{aligned}$$

Contoh. Misalkan $z = x + iy$ dan $f(z) = f(x+iy) = x^3 + (1-y)^3$. Diperoleh

$$u(x,y) = x^3 \ \text{ dan } \ v(x,y) = (1-y)^3,$$

sehingga

$$u_x(x,y) = 3x^2,\ u_y(x,y) = 0$$

dan

$$v_x(x,y) = 0,\ v_y(x,y) = -3(1-y)^2.$$

Persamaan Cauchy-Riemann $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ dipenuhi untuk semua (x,y) yang memenuhi

$$3x^2 + 3(1-y)^2 = 0 \ \text{ atau } \ x^2 + (1-y)^2 = 0.$$

Diperoleh $(x,y) = (0,1)$. Sementara untuk persamaan $u_y(x,y) = 0 = v_x(x,y)$ dipenuhi untuk semua (x,y). Akibatnya, persamaan Cauchy-Riemann hanya dipenuhi di titik $(0,1)$. Karena urunan-turunan parsial pertama dari u dan v kontinu untuk semua (x,y), khususnya di $(0,1)$, maka f mempunyai turunan di $z = i$ dengan

$$f'(z) = f'(i) = u_x(0,1) + iv_x(0,1) = 0.$$

Teorema 14 (**Persamaan Cauchy-Riemaan pada Koordinat Polar**). *Misalkan $f(z) = u(r,\theta) + v(r,\theta)$ untuk $z = re^{i\theta}$. Jika, f terdefinisi pada suatu lingkungan dari $z_0 = r_0 e^{i\theta 0}$ dan memenuhi*

1. *Turunan-turunan pertama dari u dan v terhadap r dan θ ada di setiap titik di lingkungan tersebut*
2. *Turunan-turunan parsial tersebut kontinu di (r_0,θ_0) dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann untuk koordinat polar di (r_0,θ_0):*

$$ru_r(r_0,\theta_0) = v_\theta(r_0,\theta_0) \ \text{ dan } \ u_\theta(r_0,\theta_0) = -rv_r(r_0,\theta_0),$$

maka $f'(z_0)$ ada dan memenuhi

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}\big(u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0)\big).$$

Contoh.

Tentukan turunan dari fungsi

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}},\ r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi.$$

Jawab. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= \sqrt{r}\cos(\theta/2) + i\sqrt{r}\sin(\theta/2). \end{aligned}$$

Diperoleh,

$$u(r,\theta) = \sqrt{r}\cos(\theta/2) \quad \text{dan} \quad v(r,\theta) = \sqrt{r}\sin(\theta/2).$$

Selanjutnya diperoleh

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos(\theta/2),\ u_\theta(r,\theta) = -\frac{\sqrt{r}}{2}\sin(\theta/2)$$

dan

$$v_r(r,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin(\theta/2),\ v_\theta(r,\theta) = \frac{\sqrt{r}}{2}\cos(\theta/2)$$

yang memenuhi

$$ru_r(r,\theta) = \frac{\sqrt{r}}{2}\cos(\theta/2) = v_\theta(r,\theta)$$

dan

$$u_\theta(r,\theta) = -\frac{\sqrt{r}}{2}\sin(\theta/2) = -rv_r(r,\theta).$$

Karena turunan-turunan parsial dari u dan v kontinu pada $\{(r,\theta) : r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}$, maka $f(z)$ mempunyai turunan pada himpunan tersebut dengan

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\cos(\theta/2) + i\frac{\sqrt{r}}{2}\sin(\theta/2)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{-i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{i\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2f(z)}. \end{aligned}$$