Deret

(Ifronika)

1. Kekonvergenan Barisan dan Deret

Barisan bilangan kompleks $\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \ldots,$ dikatakan konvergen ke z apabila

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Bentuk limit di atas artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga

$$\text{jika } \ n > n_0 \ \text{ berlaku } \ |z_n - z| < \epsilon.$$

Apabila barisan $\{z_n\}$ memiliki limit, maka nilainya tunggal, dan apabila barisan $\{z_n\}$ tidak memiliki limit, maka dikatakan barisan tersebut divergen.

Contoh. Buktikan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{i}{n} = 1.$

Jawab. Ambil $\epsilon > 0$ sembarang, pilih $n_0 \in \mathbb{N}$, dengan $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$, sehingga jika $n > n_0$ berlaku

$$|z_n - 1| = \left|1 + \frac{i}{n} - 1\right| = \left|\frac{i}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{i}{n} = 1.$

Teorema 1. *Misalkan $z_n = x_n + iy_n$, untuk $n = 1, 2, \cdots,$ dan $z = x + iy$.*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textit{dan} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Bukti 1. *Misalkan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Ambil $\epsilon > 0$ sembarang, pilih $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sehingga*

$$\textit{jika } \ n > n_1 \ \textit{ berlaku } \ |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

dan

$$\textit{jika } \ n > n_2 \ \textit{ berlaku } \ |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pilih $n_0 = maks\ \{n_1, n_2\}$, sehingga jika $n > n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(x_n + iy_n) - (x + iy)| \\ &= |(x_n - x) + i(y_n - y)| \\ &\le |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Ambil $\epsilon > 0$ sembarang dan pilih $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\textit{jika } \ n > n_0 \ \textit{ berlaku } \ |z_n - z| < \epsilon.$$

Perhatikan bahwa untuk $n > n_0$ *berlaku*

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x - iy)| = |z_n - z| < \epsilon.$$

dan

$$|y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x - iy)| = |z_n - z| < \epsilon.$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *dan* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Teorema sebelumnya juga dapat ditulis sebagai

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n.$$

jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{dan} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Contoh. Buktikan bahwa barisan $z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ konvergen ke -1.

Jawab.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(-1 + i\frac{(-1)^n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}(-1) + i\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\\ &= -1 + i0\\ &= -1.\end{aligned}$$

Tetapi, apabila menghitung limit dengan menggunakan koordinat polar perlu hati-hati.

Contoh. Pandang barisan sebelumnya, yakni $z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$, dalam koordinat polar

$$r_n = |z_n| \quad \text{dan} \quad \Theta_n = \operatorname{Arg} z_n \quad \text{dengan} \quad -\pi < \Theta_n \leq \pi.$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} = 1,$$

tetapi untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$\lim_{n\to\infty}\Theta_{2n} = \pi \quad \text{dan} \quad \lim_{n\to\infty}\Theta_{2n-1} = -\pi,$$

sehingga $\lim\limits_{n\to\infty}\Theta_n$ tidak ada. Jadi kita tidak dapat menyimpulkan limit barisan z_n dengan menggunakan koordinat polar.

Contoh. Misalkan $z_n = 1 + i\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$, dalam koordinat polar

$$r_n = |z_n| \quad \text{dan} \quad \Theta_n = \operatorname{Arg} z_n \quad \text{dengan} \quad -\pi < \Theta_n \leq \pi.$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} = 1,$$

dan untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$\lim_{n\to\infty}\Theta_n = 0.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} r_n e^{i\Theta_n}\\ &= \lim_{n\to\infty} r_n \lim_{n\to\infty} e^{i\Theta_n}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Kekonvergenan Deret

Deret tak hingga bilangan kompleks

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

konvergen ke S atau $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$. apabila barisan jumlah parsial

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_1 + z_2 + \cdots + z_N$$

konvergen ke S dan dinotasikan dengan

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Apabila barisan jumlah parsialnya divergen, maka deret divergen.

Teorema 2. *Misalkan* $z_n = x_n + iy_n$, *untuk* $n = 1, 2, \cdots$, *dan* $S = X + iY$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

jika dan hanya jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad dan \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y.$$

Bukti 2. *Misalkan*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad dan \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y.$$

dan misalkan $X_N = \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$ *dan* $Y_N = \sum\limits_{n=1}^{N} y_n$, *maka*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = \sum_{n=1}^{N}(x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n + i\sum_{n=1}^{N} y_n = X_n + iY_n.$$

Akibatnya

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} X_n + i \lim_{N\to\infty} Y_N = X + iY = S.$$

Jadi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Selanjutnya misalkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Tulis

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = X_n + iY_n$$

dengan

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad dan \quad Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n.$$

Dari sifat kekonvergenan barisan, $\lim_{N\to\infty} S_N = S = X + iY$ *jika dan hanya jika* $\lim_{N\to\infty} X_N = X$ *dan* $\lim_{N\to\infty} Y_N = Y$.

Teorema di atas juga mengatakan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Akibat 1. *Jika deret bilangan kompleks* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konvergen, maka* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Bukti 3. *Misalkan* $z_n = x_n + iy_n$. *Karena* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konvergen, maka* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *konvergen. Akibatnya,*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n = 0 + i0 = 0.$$

Akibat di atas juga mengatakan bahwa jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen, maka suku-suku pada deret tersebut terbatas, yakni terdapat $M > 0$ sehingga $|z_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3. *Deret*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$$

dikatakan konvergen mutlak apabila deret bilangan real

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

konvergen.

Akibat 2. *Jika deret*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

kovergen mutlak, maka deret tersebut konvergen.

Bukti 4. *Misalkan* $z_n = x_n + iy_n$. *Perhatikan bahwa*

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad dan \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ *konvergen, maka berdasarkan uji banding biasa pada deret bilangan real, deret-deret*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad dan \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

konvergen, sehingga diperoleh deret-deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad dan \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

konvergen. Akibatnya deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konvergen.*

Selanjutnya, misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ dengan jumlah parsial $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$. Suku sisa ρ_N didefinisikan sebagai

$$\rho_N = S - S_N.$$

Akibatnya $S = S_N + \rho_N$.

Lema 1. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konvergen jika dan hanya jika barisan suku sisanya konvergen ke 0.*

Bukti 5. *Misalkan* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ *dan* $\rho_N = S - S_N$ *dengan* $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$. *Ambil* $\epsilon > 0$ *sembarang. Karena*

$$\lim_{N \to \infty} S_N = S$$

maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ *sehingga jika* $N > K$ *berlaku*

$$|S_N - S| < \epsilon.$$

Akibatnya, jika $N > K$ *berlaku*

$$|\rho_N - 0| = |S - S_N| < \epsilon.$$

Jadi, $\lim_{N \to \infty} \rho_N = 0$.

Deret Pangkat

Deret pangkat memiliki bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

dimana z_0 dan koefisien a_n adalah konstanta-konstanta kompleks, dan z adalah titik yang berada di suatu region yang memuat z_0.

Contoh. Dengan melihat suku sisanya, akan ditunjukan jika $|z| < 1$, maka deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Jawab. Misalkan

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}.$$

Karena $S_N(z) - zS_N(z) = 1 - z^N$, diperoleh $S_N(z) = \dfrac{1-z^n}{1-z}$, untuk $z \neq 1$. Jika limit deret

$$S(z) = \frac{1}{1-z},$$

maka suku sisa

$$\rho_N = S(z) - S_N(z) = \frac{z^N}{1-z} \quad \text{untuk} \quad z \neq 1.$$

Diperoleh

$$\lim_{N\to\infty} |\rho_N(z)| = \lim_{N\to\infty} \frac{|z|^N}{|1-z|},$$

yang akan bernilai 0 apabila $|z| < 1$ dan divergen apabila $|z| \geq 1$. Untuk $z = 1$ deret $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ divergen. Jadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

untuk $|z| < 1$ dan divergen untuk $|z| \geq 1$.

Deret Taylor

Teorema 4. *Misalkan $D(z_0, R_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R_0\}$ adalah cakram buka yang berpusat di $z_0 \in \mathbb{C}$ dan jari-jari R_0. Jika fungsi f analitik di D, maka $f(z)$ dapat direpresentasikan sebagai deret pangkat*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{untuk} \quad z \in D,$$

dimana

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

dengan

$$f^{(0)}(z_0) = f(z_0) \quad \textit{dan} \quad 0! = 1.$$

Deret pangkat di atas, dapat dituliskan sebagai

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots \quad \text{untuk} \quad z \in D.$$

Deret ini disebut sebagai **Deret Taylor** dari $f(z)$ di titik z_0. Apabila $z_0 = 0$, deret ini disebut **deret Maclaurin.**

Contoh. Tentukan uraian deret Maclaurin dari fungsi $f(z) = e^z$.

Jawab. Perhatikan bahwa fungsi $f(z) = e^z$ merupakan fungsi entire, sehingga f dapat direpresentasikan oleh deret Maclaurin. Untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ berlaku $f^{(n)}(z) = e^z$ dan $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, sehingga diperoleh

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

untuk $|z| < \infty$.

Contoh. Akan dibuktikan

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad \text{untuk} \quad |z| < 1 \tag{1}$$

dengan menggunakan Teorema Taylor.

Jawab. Perhatikan bahwa fungsi $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ memiliki satu titik singular, yaitu $z = 1$. Jarak dari $z_0 = 0$ ke $z = 1$ adalah 1, sehingga f analitik pada cakram buka $|z| < 1$. Turunan-turunan dari f adalah

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{untuk} \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

sehingga $f^{(n)}(0) = n!$. Akibatnya diperoleh deret Maclaurin dari f adalah

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{untuk} \quad |z| < 1.$$

Contoh. Tentukan uraian deret Maclaurin dari fungsi $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$.

Jawab. Perhatikan bahwa, apabila deret pada persamaan (1) kita substitusikan z dengan $-z$ diperoleh

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{untuk} \quad |-z| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 1.$$

Contoh. Tentukan uraian deret Taylor dari fungsi $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ di $z_0 = i$.

Jawab. Perhatikan bahwa jarak titik $z_0 = i$ dengan titik singular $z = 1$ adalah $|1 - i| = \sqrt{2}$, sehingga f analitik pada $|z - i| < \sqrt{2}$. Untuk mendapatkan deret Taylor dari fungsi f di $z_0 = i$, tulis f sebagai

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \left(\frac{1}{1-i}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}\right)$$

sehingga apabila $|z - i| < \sqrt{2}$ berlaku

$$\left|\frac{z-i}{1-i}\right| = \frac{|z-i|}{|1-i|} = \frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1.$$

Diperoleh

$$\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n \quad \text{untuk} \quad |z-i| < \sqrt{2}.$$

Akibatnya diperoleh deret Taylor

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n \quad \text{untuk} \quad |z-i| < \sqrt{2}.$$

Contoh. Tentukan uraian deret Maclaurin dari fungsi $f(z) = \sin z$ dengan menggunakan deret Maclaurin dari fungsi e^z.

Jawab. Perhatikan bahawa untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ berlaku

$$\begin{aligned}\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\frac{i^n z^n}{n!} \quad \text{untuk} \quad |z| < \infty.\end{aligned}$$

Karena

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ genap} \\ 2, & n \text{ ganjil,}\end{cases}$$

sehingga untuk setiap $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

Contoh. Karena $\sinh z = -i\sin(iz)$, sehingga diperoleh deret Maclaurin dari $\sinh z$,

$$\begin{aligned}\sinh z = -i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(iz)^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-i(-1)^n}{(2n+1)!}i(i^2)^n z^{2n+1}.\\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1!)} \quad \text{untuk } |z| < \infty.\end{aligned}$$

Contoh. Tentukan uraian deret Maclaurin dari fungsi $\frac{e^{-z}}{z^2}$ dengan menggunakan deret Maclaurin dari e^z.

Jawab. Perhatikan bahwa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n-2}}{n!}\\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} - \cdots\end{aligned}$$

untuk $0 < |z| < \infty$.

Deret Laurent

Teorema 5 (Teorema Laurent). *Misalkan domain D adalah anulus yang berpusat di z_0, $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, dan C adalah kontur tutup sederhana di D yang mengelilingi z_0 dengan orientasi positif. Jika f analitik di D, maka untuk setiap $z \in D$, $f(z)$ dapat direpresentasikan sebagai deret*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \tag{2}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad \textit{untuk} \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

dan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz \quad \textit{untuk} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Apabila indeks n pada deret kedua di atas diganti dengan $-n$ maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^{-n}},$$

dimana

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad \text{untuk} \quad n = -1, -2, \cdots,$$

sehingga

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n} (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{untuk} \quad z \in D$$

Apabila dituliskan

$$c_n = \begin{cases} b_n & \text{jika } n \leq -1 \\ a_n & \text{jika } n \geq 0, \end{cases}$$

maka

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{untuk} \quad z \in D,$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad \text{untuk} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Perhatikan bahwa fungsi f pada Teorema Laurent analitik di cakram buka $|z - z_0| < R_2$, maka $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ juga analitik di $|z - z_0| < R_2$ untuk $n = 1, 2, 3 \cdots$. Akibatnya untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$ berlaku

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(z - z_0)^{n-1} = 0.$$

Dengan menggunakan rumus integral Cauchy yang diperluas, diperoleh

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{untuk} \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

sehingga deret pada persamaan (2) menjadi deret Taylor.

Contoh. Tentukan deret Laurent dari fungsi $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ untuk $|z| > 1$.

Jawab. Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad \text{untuk} \quad |z| < 1.$$

Akibatnya, jika $|z| > 1$ maka $\dfrac{1}{|z|} < 1$, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Contoh. Tentukan deret Laurent dari fungsi $f(z) = e^{1/z}$ untuk $0 < |z| < \infty$.

Jawab. Perhatikan bahwa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad \text{untuk} \quad |z| < \infty.$$

Akibatnya untuk $0 < |z| < \infty$ diperoleh

$$\begin{aligned}
e^{1/z} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} \\
&= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots .
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dari contoh di atas diperoleh

$$1 = b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C = z^{-1+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{1/z}\, dz$$

sehingga didapat

$$\int_C e^{1/z}\, dz = 2\pi i.$$

Contoh. Tentukan uraian deret Laurent dari fungsi $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ pada $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ dan $|z| > 2$.

Jawab. (a) Untuk $|z| < 1$.

Tulis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-3z+2} &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} \\
&= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh titik-titik singular dari f adalah $z = 1$ dan $z = 2$. Akibatnya, fungsi f akan analitik pada $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Selanjutnya untuk $|z| < 1$ diperoleh

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

dan

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Jadi, untuk $|z| < 1$ didapat

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n. \end{aligned}$$

(b) Untuk $1 < |z| < 2$. Perhatikan bahwa fungsi $\dfrac{1}{z-1}$ tidak analitik pada $|z| > 1$. Karena $1 < |z| < 2$ maka $\dfrac{1}{|z|} < 1$, sehingga apabila $\dfrac{1}{|z|} < 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Fungsi $\dfrac{1}{z-2}$ analitik pada $1 < |z| < 2$ sehingga

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Jadi, diperoleh deret Laurent dari f yakni,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

(c) Untuk $|z| > 2$ diperoleh $\dfrac{1}{|z|} < 1$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)\\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)\\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh deret Laurent dari f yakni,

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-z^n)\frac{1}{z^{n+1}}.\end{aligned}$$

Contoh. Fungsi $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ sudah berbentuk deret Laurent di $z_0 = i$, yakni

$$\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-i)^n \quad \text{untuk} \quad 0 < |z-i| < \infty,$$

dengan $c_{-2} = 1$ dan $c_n = 0$ untuk $n \neq 2$. Dari rumus c_n diperoleh

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1/(z-i)^2}{(z-i)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-i)^{n+3}}\,dz,$$

untuk $n \in \mathbb{Z}$, dimana C adalah kontur tutup sederhana yang mengelilingi $z_0 = i$ dengan orientasi positif. Akibatnya didapat

$$\int_C \frac{1}{(z-i)^{n+3}}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{jika } n \neq 2\\ 2\pi i & \text{jika } n = 2.\end{cases}$$